Teoria dos Grafos

Cândida Nunes da Silva

UFSCar - Campus Sorocaba

Subgrafos

Subgrafos e Supergrafos

- Existem diversas formas de obter grafos menores a partir de um grafo G.
- As operações mais comuns são a *remoção de arestas* e a remoção de vértices.
- Remover uma aresta e de um grafo G significa remover o par de extremos de e de $E(G)$, deixando o conjunto de vértices e as demais arestas de G intactas. O grafo resultante é denotado $G \setminus e$.
- Remover um vértice v de um grafo G significa remover v de $V(G)$ e também remover de $E(G)$ todas as arestas incidentes em v. O grafo resultante é denotado $G - v$.
- Ambos os grafos $G \setminus e$ e $G - v$ são exemplos de *subgrafos* de G.

Subgrafos e Supergrafos

- Um grafo F é um *subgrafo* de G se $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$ e ψ_F é a restrição de ψ_G a $E(F)$.
- Nesse caso dizemos que G *contém* F ou que F está *contido* em G, denotado $G \supseteq F$ e $F \subseteq G$ respectivamente.
- Qualquer subgrafo F de G pode ser obtido repetindo-se as operações de remoção de vértices e arestas.
- Um *supergrafo* H de um grafo G é um grafo que contém G como subgrafo, isto é, $H \supseteq G$.
- Todo grafo é subgrafo e supergrafo de si mesmo.
- Demais subgrafos F e supergrafos H de G são chamados de *próprios*, denotado $F \subset G$ e $G \supset H$, respectivamente.
- Todas estas definições se aplicam para grafos direcionados também, com as respectivas adaptações necessárias.

Teorema 2.1

Seja G um grafo tal que $\delta(G) \geq 2$. Então G contém um ciclo.

- **Dms:** Se G tem um laço, contém C_1; se tem arestas paralelas, contém C_2.
- Podemos então supor que G é simples.
- Seja $P := v_0 v_1 \ldots v_{k-1} v_k$ um caminho mais longo em G.
- Como $\delta(G) \geq 2$, v_k tem pelo menos mais um vizinho v distinto de v_{k-1}.
- Se $v \notin P$, temos uma contradição à escolha de P.
- Logo, $v = v_i$ para algum $0 \leq i \leq k-2$ e $v_i v_{i+1} \ldots v_{k-1} v_k$ é um ciclo de G. $\square$

Maximalidade e Minimalidade

- Seja $\mathcal{F}$ uma família de subgrafos de G. Dizemos que um membro F de $\mathcal{F}$ é *maximal* se não existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset F'$.
- Por exemplo, se $\mathcal{F}$ é a família de todos os caminhos contidos em um grafo G, um caminho P de $\mathcal{F}$ é maximal se nenhum outro caminho de $\mathcal{F}$ contém P propriamente.
- Note que um caminho de comprimento máximo certamente será um caminho maximal de G, mas nem todo caminho maximal terá comprimento máximo.
- Se $\mathcal{F}$ é a família de todos os subgrafos conexos de um grafo G, os elementos maximais de $\mathcal{F}$ são os componentes conexos de G.
- Note que, na prova do Teorema 2.1, poderíamos ter tomado P como um caminho maximal de G, e não o de comprimento máximo.

Maximalidade e Minimalidade

- Analogamente, se $\mathcal{F}$ é uma família de subgrafos de G, dizemos que um membro F de $\mathcal{F}$ é *minimal* se não existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F' \subset F$.
- Por exemplo, se $\mathcal{F}$ é a família de todos os subgrafos não bipartidos de um grafo G, seus elementos minimais são ciclos ímpares C_{2n+1}, pois qualquer subgrafo próprio de um tal ciclo é bipartido.
- Todo ciclo de um grafo é maximal e minimal pois não está contido e tampouco contém outro ciclo.
- Nesse contexto fica evidente a distinção entre maximal (minimal) e máximo (mínimo).
- Os ciclos de comprimento máximo e mínimo em um grafo recebem nomes especiais: *circunferência (circumference)* e *cintura (girth)*.

Grafos Acíclicos

- Um grafo é *acíclico* se não contém um ciclo.
- Pelo Teorema 2.1, um grafo acíclico tem pelo menos um vértice de grau um ou zero.
- Exercícios:
  - Mostre que um grafo acíclico não trivial tem pelo menos *dois* vértices de grau um.
  - Mostre que se $m \geq n$, então o grafo tem um ciclo.

Grafos Acíclicos

- Um grafo direcionado é acíclico se não tem um ciclo direcionado.
- Um grafo direcionado acíclico pode ter grau mínimo maior que um.
- Exercício: Encontre um torneio acíclico.
- Exercício: Dê um algoritmo para orientar as arestas de um grafo completo K_n de forma que o grafo direcionado resultante seja um torneio acíclico. Dica: Use indução.

Subgrafos Geradores e Induzidos

- Um *subgrafo gerador (spanning subgraph)* F de um grafo G é um subgrafo obtido a partir de G pela remoção de arestas apenas.
- Em outras palavras, F é um subgrafo de G tal que $V(F) = V(G)$.
- Se S é o conjunto de arestas removido para obter F a partir de G, então dizemos que F é o grafo $G \setminus S$.
- Note que todo grafo simples é um subgrafo gerador de um grafo completo.

Subgrafos Geradores e Induzidos

- Alguns tipos de subgrafos geradores aparecem comumente em aplicações de teoria dos grafos.
- Por exemplo, um *caminho hamiltoniano* ou *ciclo Hamiltoniano* é um caminho ou ciclo gerador de um dado grafo, respectivamente.
- Dizemos que um grafo é *hamiltoniano* se tem um ciclo hamiltoniano.
- O nome é uma homenagem a Sir William Hamilton, que inventou um jogo onde dado um caminho com 5 vértices no dodecaedro pergunta-se se é possível estender esse caminho a um ciclo hamiltoniano.
- Exercícios:
  - O dodecaedro é hamiltoniano?
  - O prisma triangular é hamiltoniano? E o prisma pentagonal?
  - O grafo de Petersen é hamiltoniano?

Subgrafos Geradores e Induzidos

Teorema de Rédei (2.3)

Todo torneio tem um caminho hamiltoniano direcionado.

- **Dms:** Exercício. Dica: use indução.
- Exercício: Encontre um torneio que não tem **ciclo** hamiltoniano direcionado.

Subgrafos Geradores e Induzidos

- Um subgrafo gerador k-regular é chamado de k-fator.
- Um 1-fator também é chamado de *emparelhamento perfeito (perfect matching)*.
- Exercícios:
  - Encontre um emparelhamento perfeito para o grafo de Petersen.
  - Encontre um 2-fator para o grafo de Petersen.
  - Prove ou dê contra-exemplo: Todo ciclo tem emparelhamento perfeito.

Subgrafos Geradores e Induzidos

- Um *subgrafo induzido ou gerado (induced subgraph)* F de um grafo G é um subgrafo obtido a partir de G pela remoção de vértices apenas.
- Em outras palavras, F é um subgrafo de G tal que toda aresta de $E(G)$ com ambos os extremos em $V(F)$ é também aresta de $E(F)$.
- Se X é o conjunto de vértices removido para obter F a partir de G, então dizemos que F é o grafo $G - X$.
- Tipicamente, é mais natural darmos foco ao conjunto $Y = V(G) - X$ dos vértices restantes, denotando F por $G[Y]$.
- Dizemos que $G[Y]$ é o grafo *induzido* por Y.

Grafos e Subgrafos Ponderados

- Na modelagem de problemas práticos, frequentemente é necessário associar outros fatores à relação de pares de objetos como, por exemplo, custos às arestas.
- Nessas situação, utilizamos *grafos ponderados* na modelagem.
- Em um grafo ponderado, há um número real $w(e)$ associado a cada aresta E, chamado de *peso* da aresta.
- Ou seja, um grafo ponderado é um par (G, w), onde G é um grafo e $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função peso.
- Computacionalmente, podemos representar w como um vetor indexado pelas arestas do grafo.
- Para grafos simples, podemos representar w na própria matriz de adjacência, fazendo a $a_{uv} = w(uv)$ para toda aresta uv.
- Na representação com listas de adjacências, cada registro que representa uma aresta pode ter um campo peso associado.

Grafos e Subgrafos Ponderados

- Se F é um subgrafo de um grafo ponderado (G, w), o *peso* de F, denotado $w(F)$ é dado pela soma dos pesos de suas arestas, isto é, $\sum_{e \in E(F)} w(e)$
- Diversos problemas de otimização referem-se a encontrar um subgrafo de um grafo ponderado com certa estrutura e de peso ótimo (máximo ou mínimo).
- Um exemplo é o famoso **Problema do Caixeiro Viajante** onde o caixeiro deseja passar por todas as n cidades de uma região e voltar à cidade de origem percorrendo a menor distância possível.
- Esse problema pode ser modelado da seguinte forma usando grafos:

Problema do Caixeiro Viajante

Dado um grafo ponderado (G, w), encontre um ciclo hamiltoniano de G de peso mínimo.

Modificações de Grafos

- A operação de *identificar* dois vértices não adjacentes x e y consiste em substituir esses dois vértices por um único vértice incidente em todas as arestas nas quais x ou y incidiam.
- Denotamos por $G/\{x, y\}$ o grafo obtido a partir de G pela identificação de x e y.
- A contração de uma aresta e consiste na remoção de e seguida da identificação de seus extremos (quando e não é laço).
- Denotamos por G/e o grafo obtido a partir de G pela contração de e.

Decomposições e Coberturas

- Uma *decomposição* de um grafo G é uma família $\mathcal{F}$ de subgrafos aresta-disjuntos de G tais que

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} E(F) = E(G).$$

- Se a família $\mathcal{F}$ consiste de caminhos ou ciclos apenas, dizemos que $\mathcal{F}$ é uma *decomposição* em caminhos ou em ciclos de G, respectivamente.
- Se um grafo G tem uma decomposição em ciclos, então o grau de cada vértice é precisamente duas vezes o número de ciclos a que pertence, logo sempre será par.
- Um grafo em que todo vértice tem grau par é chamado de *grafo par*.
- Assim, todo grafo que tem decomposição em ciclos é par.
- A recíproca também é verdadeira!

Teorema de Veblen (2.7)

Um grafo admite uma decomposição em ciclos se e somente se é par.

- **Dms:** Já argumentamos sobre a necessidade, basta mostrar a suficiência. A prova é por indução em $e(G)$.
- Suponha que o grafo G é par.
- Se G é vazio, tem uma decomposição em uma família vazia de ciclos.
- Caso contrário, seja F o subgrafo de G induzido pelos vértices de grau positivo.
- Como G é par, F também é, e cada um de seus vértices tem grau pelo menos dois.

Teorema de Veblen (2.7)

Um grafo admite uma decomposição em ciclos se e somente se é par.

- Pelo Teorema 2.1, F tem um ciclo C.
- O subgrafo $G' := G \setminus E(C)$ é par e tem menos arestas que G.
- Por hipótese de indução, G' tem uma decomposição em ciclos $\mathcal{C}'$.
- Então, $\mathcal{C} := \mathcal{C}' \cup C$ é uma decomposição em ciclos de G. $\square$

Decomposições e Coberturas

- Uma *cobertura* de um grafo G é uma família $\mathcal{F}$ de subgrafos de G, não necessariamente aresta-disjunta, tal que

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} E(F) = E(G).$$

- Uma cobertura é *uniforme* se cobre cada aresta de G o mesmo número de vezes.
- Uma k-cobertura é uma cobertura uniforme em que cada aresta é coberta k vezes. Uma 2-cobertura é chamada de cobertura dupla.
- Se a família $\mathcal{F}$ consiste apenas de caminhos ou ciclos, dizemos que é uma *cobertura por caminhos* ou *cobertura por ciclos*, respectivamente.

- Dados dois conjuntos X e Y de vértices de um grafo G (não necessariamente disjuntos), denotamos por $E[X, Y]$ o conjunto das arestas de G com um extremo em X e outro em Y e por $e(X, Y)$ sua cardinalidade.
- Se $X = Y$, usamos a notação $E(X)$ e $e(X)$ simplesmente.
- Quando $Y = V - X$, o conjunto $E[X, Y]$ é chamado de *corte (cut)* de X em G e denotado por $\partial(X)$.
- Usando essa notação, um grafo G é bipartido se $\partial(X) = E$ para algum subconjunto X de V, e conexo se $\partial(X) \neq \emptyset$ para todo subconjunto próprio e não vazio X de V.

Cortes de Arestas

- Um corte de arestas $\partial(v)$ associado a um único vértice é chamado de *corte trivial*, e dado pelo conjunto das arestas de ligação incidentes a v.
- Se nenhum laço incide em v, então $|\partial(v)| = d(v)$.
- Quando G é livre de laços, dizemos que $|\partial(X)|$ é o *grau* de X, denotado $d(X)$.

Teorema 2.9

Para todo grafo G e subconjunto X de V, temos

$$|\partial(X)| = \sum_{v \in X} d(v) - 2e(X).$$

- **Dms:** Exercício (Generalização do Teorema 1.1). $\square$

Teorema 2.10

Um grafo é par se e somente se $|\partial(X)|$ é par para todo subconjunto X de V.

- **Dms:** Se $|\partial(X)|$ é par para todo subconjunto X de V, então, em particular, $|\partial(v)|$ é par para todo vértice v de G.
- Mas $|\partial(v)|$ é o número de arestas de ligação incidentes em v, e como laços contam duas vezes, o grau de v é par para todo vértice v.
- Reciprocamente, quando G é par, pelo Teorema 2.9, todo corte de arestas tem cardinalidade par. $\square$

Cortes de Arestas

- Dados dois conjuntos X e Y de vértices de um grafo direcionado $D = (V, A)$ (não necessariamente disjuntos), denotamos por $A(X, Y)$ o conjunto das arestas de D com origem em X e destino em Y e por $a(X, Y)$ sua cardinalidade.
- Se $X = Y$, usamos a notação $A(X)$ e $a(X)$ simplesmente.
- Quando $Y = V - X$, o conjunto $A(X, Y)$ é chamado de *corte de saída (outcut)* de X em D e denotado por $\partial^+(X)$.
- Analogamente, quando $Y = V - X$, o conjunto $A(Y, X)$ é chamado de *corte de entrada (incut)* de X em D e denotado por $\partial^-(X)$.
- Note que sempre $\partial^+(X) = \partial^-(V - X)$ e que $\partial(X) = \partial^+(X) \cup \partial^-(X)$.

Cortes de Arestas

- No caso de grafos direcionados sem laços, dizemos que $|\partial^+(X)|$ e $|\partial^-(X)|$ são os *graus de entrada (indegree) e saída (outdegree)* de X, e denotamos seus valores por $d^+(X)$ e $d^-(X)$, respectivamente.
- Um grafo direcionado é *fortemente conexo (strongly connected)* se $\partial^+(X) \neq \emptyset$ para todo subconjunto próprio não vazio X de V.
- Note que, necessariamente, $\partial^-(X) \neq \emptyset$ para todo subconjunto próprio não vazio X de V também em um grafo direcionado fortemente conexo.